УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 154, кн. 1 Физико-математические науки *2012*

УДК 517.957

О СВОЙСТВАХ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

О.А. Задворнов, Г.О. Задворнова

Аннотация

Исследованы свойства решения нелинейной задачи фильтрации в неоднородной пористой среде при наличии точечного источника для жидкости, следующей закону с линейным ростом на бесконечности. При формулировке обобщенной постановки задачи использовано аддитивное выделение особенности, связанной с сингулярностью правой части. Поле давления представлено в виде суммы известного решения некоторой линейной (ассоциированной с исходной) задачи с точечным источником в правой части и неизвестного «добавка». Установлена непрерывность по Гельдеру второго слагаемого.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, неоднородная среда, точечный источник, непрерывность по Гельдеру.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию свойств решения обобщенной задачи, возникающей при математическом моделировании установившегося процесса фильтрации несжимаемой жидкости в произвольной неоднородной ограниченной области при наличии точечного источника. Предполагается, что функция, определяющая закон фильтрации, имеет линейный рост на бесконечности. Неоднородность среды моделируется зависимостью функции от точек области фильтрации.

Из [1] следует, что решение рассматриваемой нелинейной задачи может быть представлено в виде суммы известного решения некоторой линейной (ассоциированной с исходной) задачи с точечным источником в правой части и неизвестного «добавка». Свойства первого слагаемого как решения эллиптического уравнения с дельта-функцией в правой части в значительной степени известны. В настоящей работе изучаются свойства гладкости второго слагаемого, являющегося решением нелинейной задачи с монотонным оператором. Мы устанавливаем, используя результаты о гладкости решения эллиптической краевой задачи, непрерывность по Гельдеру «добавка». Дополнительная гладкость этого слагаемого может быть использована в обосновании приближенных методов решения исходной задачи, в частности при исследовании сходимости ее конечномерной аппроксимации.

1. Постановка нелинейной задачи фильтрации при наличии точечного источника

Рассматривается краевая задача описывающая установившийся процесс фильтрации несжимаемой жидкости в пористой среде. Фильтрация происходит в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с липшиц-непрерывной границей $\partial\Omega$, на которой давление считается известным, при наличии точечного источника интенсивности q в начале координат (считаем, не ограничивая общности, что начало координат – внутренняя точка Ω):

$$-\mathrm{div}\left(\frac{g\,(x,|\nabla w(x)|)}{|\nabla w(x)|}\,\nabla w(x)\right) = q\delta(x), \quad x\in\Omega, \tag{1}$$

$$w(x) = w_\gamma(x), \quad x\in\partial\Omega. \tag{2}$$

Относительно функции $g:\Omega\times\mathbb{R}^1_+\to\mathbb{R}^1_+\equiv\{t\in\mathbb{R}^1: t\geqslant 0\}$, задающей связь между давлением и скоростью фильтрации, предполагаем, что выполнены условия Каратеодори [3, с. 196]:

(I) для почти всех $x\in\Omega$ функция $t\to g(x,t)$ непрерывна при $t\in\mathbb{R}^1_+$;

(II) для каждого $t\in\mathbb{R}^1_+$ функция $x\to g(x,t)$ измерима на Ω;

(III) функция g имеет линейный рост на бесконечности: существуют постоянная $k_0>0$ и функция $b_0\in L_p(\Omega)$, $p\geqslant 2$, такие, что

$$|\,g(x,t)-k_0\,t\,|\leqslant b_0(x) \quad \forall\, t\in\mathbb{R}^1_+, \quad \forall\, x\in\Omega. \tag{3}$$

Кроме того, считаем, что g не убывает:

$$g(x,t)\geqslant g(x,s) \quad \forall\, t>s\geqslant 0, \quad \forall\, x\in\Omega, \tag{4}$$

и липшиц-непрерывна: существует постоянная $L>0$ такая, что

$$|g(x,t)-g(x,s)|\;\leqslant\; L\,|\,s-t\,| \quad \forall\, t\in\mathbb{R}^1_+, \quad \forall\, x\in\Omega. \tag{5}$$

Предполагаем также, что существует функция $\widetilde{w}(x)\in W_2^{(1)}(\Omega)$ со следом на $\partial\Omega$, удовлетворяющим равенству

$$\widetilde{w}(x) = w_\gamma, \quad x\in\partial\Omega. \tag{6}$$

Запишем вариационную формулировку задачи (1), (2):

$$\begin{cases}\text{найти } w\in W_1^1(\Omega): \int\limits_\Omega\left(\dfrac{g\,(x,|\nabla w|)}{|\nabla w|}\,\nabla w,\nabla\eta\right)dx = q\,\eta(0) \quad \forall\,\eta\in C_0^\infty(\Omega),\\ w(x)=w_\gamma, \quad x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{7}$$

Из работы [1] следует, что если $b_0\in L_2(\Omega)$ (b_0 – функция из условия (3)), то решение задачи (7) существует и может быть представлено в виде суммы $w=\xi+u$. Здесь функция ξ является решением линейной краевой задачи (k_0 – постоянная из неравенства (3))

$$\begin{cases}\text{найти } \xi\in W_1^1(\Omega):\; k_0\int\limits_\Omega(\,\nabla\xi(x),\,\nabla\eta(x))\;dx = q\eta(0) \quad \forall\,\eta\in C_0^\infty(\Omega),\\ \xi(x)=w_\gamma, \quad x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{8}$$

а функция $u\in\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ является решением следующей задачи:

$$\int\limits_\Omega\left(\frac{g\,(x,|\nabla(\xi+u)(x)|)}{|\nabla(\xi+u)(x)|}\,\nabla(\xi+u)(x)-k_0\,\nabla\xi(x),\,\nabla\eta(x)\right)dx=0 \quad \forall\,\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega). \tag{9}$$

Краевая задача (8) для уравнения Лапласа с точечным источником достаточно хорошо изучена и свойства ее решения известны (см., например, [2]).

2. Исследование задачи фильтрации

Целью настоящей работы является изучение свойств гладкости решения задачи (9). Далее рассмотрим задачу, частным случаем которой является (9). Пусть вектор-функция $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ локально-интегрируема на множестве Ω

$$|Y| \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{10}$$

Будем изучать задачу поиска функции $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ такой, что выполнено вариационное тождество

$$\int\limits_\Omega \Big(\frac{g\,(x, |Y(x)+\nabla u(x)|)}{|Y(x)+\nabla u(x)|} (Y(x)+\nabla u(x)) - \\ - \ k_0 Y(x), \nabla\eta(x) \Big)\, dx = 0 \quad \forall\, \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega). \tag{11}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть* g *удовлетворяет условиям* (I)–(III), (4), (5), *функция* Y – *условию* (10), *тогда задача* (11) *имеет решение.*

Если дополнительно выполнено неравенство $p > n$, *то это решение будет непрерывно по Гельдеру в любой подобласти области* Ω *с показателем, зависящим от* p.

Доказательство. Вначале установим справедливость второй части теоремы. Преобразуем вариационное равенство (9) к виду

$$\int\limits_\Omega (k_0\, \nabla u,\, \nabla\eta)\; dx = \int\limits_\Omega \left(k_0\,(Y+\nabla u) - \frac{g\,(x, |Y+\nabla u|)}{|Y+\nabla u|}\,(Y+\nabla u),\, \nabla\eta \right) dx. \tag{12}$$

Пусть u – некоторое решение задачи (9), введем следующую функцию:

$$F_u(x) = k_0\,(Y(x)+\nabla u(x)) \, - \frac{g\,(x, |Y(x)+\nabla u(x)|)}{|Y(x)+\nabla u(x)|}\,(Y(x)+\nabla u(x)) \quad x \in \Omega, \tag{13}$$

Из неравенства (3) вытекает оценка

$$|F_u(x)| = |k_0\,|Y(x)+\nabla u(x)| - g\,(x, |Y(x)+\nabla u(x)|)| \leqslant b_0(x), \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{14}$$

Таким образом, всякое решение u задачи (9) является решением краевой задачи Дирихле

$$\begin{cases} \text{найти } u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega): \ k_0 \triangle u(x) = \operatorname{div} F_u(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{15}$$

с правой частью, удовлетворяющей условию $|F_u| \in L_p(\Omega)$, $p \geqslant 2$. Теперь, пользуясь известными свойствами решения краевой задачи (15) (см., например, [4, с. 250]), получаем при $p > n$ непрерывность по Гельдеру функции u.

Существование решения доказывается так же, как и в [1], путем сведения задачи (11) к уравнению с монотонным и коэрцитивным оператором. Пусть $V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением и соответствующей ему нормой, задаваемыми по формулам:

$$(u, w)_V = \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla w)\, dx, \quad \|u\|_V = \Big[\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx \Big]^{1/2} \quad u, v \in V. \tag{16}$$

Определим оператор $A : V \to V$ следующей формой:

$$(Au, v)_V = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{g\,(x, |Y + \nabla u|)}{|Y + \nabla u|}(Y + \nabla u) - k_0 Y, \nabla v \right) dx \quad u,\, v \in V. \tag{17}$$

Корректность определения (17) следует из (I)–(III), (10) и неравенства

$$\left| \frac{g\,(x, |Y(x) + \lambda|)}{|Y(x) + \lambda|}\,(Y(x) + \lambda) - k_0 Y(x) \right| =$$

$$= \left| \frac{g\,(x, |Y(x) + \lambda|)}{|Y(x) + \lambda|}\,(Y(x) + \lambda) - k_0\,(Y(x) + \lambda) + k_0\,\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|g\,(x, |Y(x) + \lambda|)\;(Y(x) + \lambda) - k_0\,(Y(x) + \lambda)|}{|Y(x) + \lambda|} + k_0\,|\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant b_0(x) + k_0|\lambda| \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Монотонность оператора A следует из условия (4), а коэрцитивность является следствием следующего неравенства (ε – произвольная положительная постоянная):

$$(Au, u)_V = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{g\,(x, |Y + \nabla u|)}{|Y + \nabla u|}(Y + \nabla u) - k_0 Y, \nabla u \right) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{g\,(x, |Y + \nabla u|)}{|Y + \nabla u|}(Y + \nabla u) - k_0 (Y + \nabla u), \nabla u \right) dx + k_0 \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx \geqslant$$

$$\geqslant -\int\limits_{\Omega} b_0(x) |\nabla u|\, dx + k_0 \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx \geqslant \left(k_0 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \|u\|_V^2 - \frac{\|b_0\|_{L_2}^2}{2\varepsilon}.$$

Пользуясь теорией монотонных операторов [5, с. 95], получаем существование решения операторного уравнения $Au = 0$, а следовательно, и задачи (11). □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00728, 12-01-97022, 12-01-31515).

Summary

O.A. Zadvornov, G.O. Zadvornova. On the Smoothness Properties of the Solution of a Nonlinear Filtration Problem in the Presence of a Point Source.

The properties of the solution of a nonlinear filtration problem in inhomogeneous porous media in the presence of a point source for a fluid obeying a law with a linear growth at infinity are studied. Additive selection of the feature connected with the singularity of the right-hand side is used. The pressure field is represented as the sum of the known solution of some linear (associated with the original) problem with a point source on the right-hand side and the unknown “additive term”. Holder continuity of the second term is established.

Key words: nonlinear filtration, inhomogeneous medium, point source, Holder continuity.

Литература

1. *Задворнов О.А.* Существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 125, кн. 1. – С. 155–163.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. – 348 с.
3. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.
4. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
5. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Поступила в редакцию
06.02.12

Задворнов Олег Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Oleg.Zadvornov@ksu.ru*

Задворнова Галина Олеговна – студент кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *ozadvorn@ksu.ru*